الأولومبيادة القطرية بالرياضيات - المرحلة الأولى

طلاب المرحلة الثانوية – موعد أ 11.9.2023

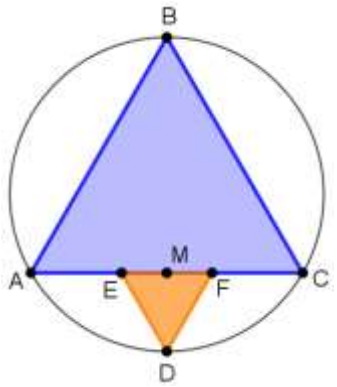
أمامكم امتحان بالرياضيات وفيه عشرة أسئلة . الأسئلة صعبة وغير اعتيادية , إذ إنَّ الطُلاب المُتفَوّقين قد يجدون صعوبة في حلها جميعها .
سيتم دعوة المُتَمَيّزين منكم للاشتراك بالمراحل القادمة من المسابقات والتدريبات , وبالنهاية سيتم تركيب المنتخب الذي سيُمثّل إسرائيل بالأولمبيادة العالميّة بالرياضيات - IMO.

أُكتب الإجابات النهائية فقط – لا حاجة للشرح .
ممنوع استخدام الحاسبة . مُدّة الامتحان : 90 دقيقة .

الأسئلة :

1. يوجد في صندوق 50 مصباح من نفس النوع و100 بطارية من نفس النوع . منهم 40 مصباح فقط صالح للعمل و 70 بطارية فقط صالحة للعمل . من أجل أن يُضيء مصباح ما يجب ادخال اثنتين من البطاريات الصالحة للعمل للمصباح بشرط أن يكون المصباح نفسُه صالح للعمل . في كُل مُحاولة يأخُذ يوسي بطارتين اثنَتَيْن ويُدخلهن لمصباح بهدف اضاءتُه . بكم مُحاولة عليه أن يقوم ليحصُل على مصباح مُضاء بالتأكيد ؟

2. نقول أنَّ العدد مُمَيَّز اذا كان ذو 7 خانات ومجموع خاناتُه أكبر من حاصل ضرب خاناتُه ب 53 . كم عدد مُميَّز يوجد ؟



3. بالرسم مُثلَّثان متُساويا الأضلاع ABC و-DEF بحيث أنَّ مُتوسطات الأضلاع AC و-EF مُتحدان , والنُقاط A, C, E و-F على نفس المُستقيم . بالإضافة الى ذلك مُعطى أنَّ النُقاط A, B, C و-D يقعن على دائرة واحدة . جِد $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}$.

4. أفيف خبَّأ كنز في واحد من مربعات لوح مُربعات 100×100. يُمكن لعنبر أن يسأل عن سطر أو عامود مُعيَّن , وأفيف يُجيب "نعم" اذا كان الكنز موجود بالسطر/العامود الذي سأل عنهُ عنبر أو اذا كان بالسطر/العامود المُجاور ; غير ذلك يُجيب أفيف "لا" . ما هُو أقل عدد أسئلة على عنبر أن يسأل ليجد الكنز بالتأكيد ?

5. مُعطى المُعادلة $14a-9b^2=17=54b-a^2-96$. جد قيمة $a\cdot b$.

6. بالنسبة لعدد صحيح موجب n, نرسُم على ورقة مُربعات مُستطيل مُركَّب من n مُربعات عرضُه 1 وطولُه n. نُمرّر بالمُستطيل القطر الواصل بين الرأس السفلي على اليسار والرأس العُلوي على اليمين . هذا القُطُر يقسم كُل واحد من ال n مُربعات لقسمين اثنين : القسم اليساري والقسم اليميني . في كُل مُربَّع , ننظُر للنسبة بين مساحة القسم اليساري لمساحة القسم اليميني : مثلا , عندما $n=2$, النسبة بالمُربَّع السُفلي هُو ثُلُث وبالمُربَّع العُلوي هُو 3 . لكم n, بين 1 و 500 (يشمل), النسبة 3/5 موجودة بأحد المُربَّعات ?

7. جد كميَّة الأعداد الصحيحة x بالمجال $20000\le x\le40000$ التي تُحقّق الشرط التالي : اذا أضفنا ل x من اليسار الأرقام 11 نحصُل على عدد يقسم على x.

8. مُعطى المُثلَّث ABF. على الضلع BF تتواجد النُقاط C,D,E. ترتيب النُقاط على الضلع BF هُو B,C,D,E,F. القِطَع AC,AD,AE تُقسّم الزاوية BAF الى أربعة زوايا مُتساوية . مُعطى أنَّ $BC=7,\ CD=8,\ DE=17$. جد طول القطعة EF.

9. يريد بيني أن يكتُب كُل الأعداد الطبيعية من1 الى 16 بمُربعات جدول 8×2 بحيث يتواجد كُل عددين مُتتاليَيْن بمُربَّعين يملكان ضلع مُشترك . بكم طريقة مُختلفة يُمكن فعل ذلك ?

10. مُتوالية مُعرَّفة عن طريق $a_1=90$, والمُعادلة

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{4}+\sqrt{a_n+\frac{1}{4}}-\sqrt{a_n+\frac{1}{4}+\sqrt{a_n+\frac{1}{4}}}$$

جِد a_{365}.

بالنجاح!